

Ein Beitrag zur hydrodynamischen Schmierungstheorie der Kugellager

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 26, 1976,
S.143-150



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ein Beitrag zur hydrodynamischen Schmierungstheorie der Kugellager

Von Bekir Dizioğlu

1. Einleitung

Von Nahme [1] stammen verschiedene Ansätze für eine brauchbare Schmierungstheorie zur Erfassung der physikalischen Vorgänge in einem Wälzlager. Dabei wird u. a. die zähe Strömung zwischen einer Kugel und einer Platte nach der üblichen klassischen Methode der hydrodynamischen Schmiermitteltheorie behandelt, d. h. als Lösung der Reynoldsschen Gleichung [2] mit konstanter Zähigkeit und eine antisymmetrische Druckverteilung berechnet. Eine der Wirklichkeit entsprechende und daher unsymmetrische Druckverteilung als Lösung der Reynoldsschen Differentialgleichung kann hergestellt werden, wenn man zumindest die elastischen Deformationen von Kugel und Platte infolge hoher Drücke im Schmier-spalt voraussetzt [3]. Mit dieser aktuellen Problematik der erweiterten Schmierungstheorie beschäftigt sich bekanntlich die moderne Tribologie [4].

In der vorliegenden Arbeit wird, anknüpfend an die Arbeit von Nahme [1], eine neue Näherungsweise Integration der Reynoldsschen Gleichung angegeben, ohne Berücksichtigung der Deformation von Kugel und Platte. Das hierbei angewandte Verfahren gestattet auch mit der gleichen Methode Druckverteilungen in ähnlich gestalteten Spaltformen näherungsweise zu ermitteln.

II. Die Aufstellung der Reynoldsschen Differentialgleichung

Entsprechend Bild 1 seien x, y die kartesischen Koordinaten in der Plattenebene; r, φ Polarkoordinaten in der Plattenebene, z die Koordinate senkrecht zur Platte,

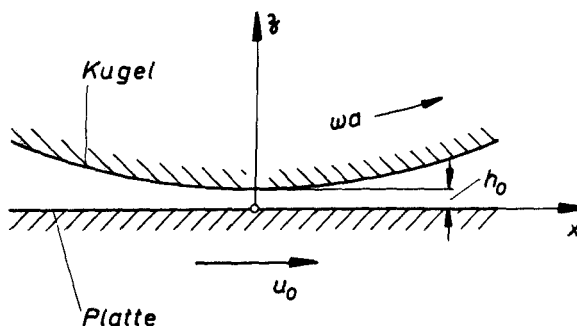


Bild 1

a der Kugelradius, h_0 die kleinste Schmierstalthöhe und $h(x, y)$ der Abstand zwischen Platte und Kugeloberfläche. Es ist $h = h_0 + a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$ also näherungsweise $h \approx h_0 + \frac{x^2 + y^2}{2a} = h_0 + \frac{r^2}{2a}$.

Diese Näherung ist natürlich nur zulässig, solange $r \ll a$ ist.

Die Platte bewege sich mit der Geschwindigkeit u_0 in Richtung der x -Achse und die Kugel drehe sich um eine Achse, die parallel zur y -Achse durch den Kugelmittelpunkt geht, mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Dann bewegen sich die Punkte der Kugeloberfläche angenähert mit der Geschwindigkeit (ωa) in Richtung der x -Achse. Diese Näherung ist zulässig, solange die Tangentialebene an die Kugel mit der Platte hinreichend kleine Winkel einschließt.

Mit $p(\rho, \varphi)$ Druckverteilungsfunktion im Schmierstalt und μ die konstant angenommene dynamische Zähigkeit des Schmiermittels wird nach der Einführung der

dimensionslosen Koordinaten $\zeta = \frac{z}{h_0}$, $\rho = \frac{r}{\sqrt{2 h_0 a}}$ und der Druckverteilung

$P = p \frac{h_0^2}{\mu \sqrt{2 h_0 a} (u_0 + \omega a)}$ die grundlegende Reynoldssche Differentialgleichung [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{6\rho}{1+\rho^2} \right) \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = \frac{12\rho}{(1+\rho^2)^2} \cos \varphi \quad (1)$$

mit dem Grundgebiet: $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und den Randbedingungen: $P(\rho, \varphi)$ eindeutig, also periodisch in φ modulo 2π , $P(0, \varphi)$ regulär sowie

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(\rho, \varphi) = P_\infty = \text{konst.}$$

III. Näherungsweise Integration der Differentialgleichung (1)

1) Wir setzen $P(\rho, \varphi) = \rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} Q(\rho, \varphi)$ und erhalten für Q

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + \left[\frac{1}{4\rho^2} - \frac{3(2+3\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} \right] Q = 12 \left(\frac{\rho}{1+\rho^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi \quad (2).$$

2) Für kleines ρ ist $\frac{1}{4\rho^2} - \frac{3(2+3\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} \approx \frac{1}{4\rho^2} - 6$,

für große ρ , $\frac{1}{4\rho^2} - \frac{3(2+3\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} \approx -\frac{35}{4\rho^2}$

und die asymptotischen Kurven $\sigma = \frac{1}{4\rho^2} - 6$, $\sigma = -\frac{35}{4\rho^2}$

schnneiden sich an der Stelle $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$, die wir zur Trennungsstelle von Bereich I ($0 \leq \rho < \sqrt{\frac{3}{2}}$) und Bereich II ($\sqrt{\frac{3}{2}} < \rho < +\infty$) machen (Bild 2). Wir ersetzen Q durch die Näherungsfunktion \tilde{Q} , die wir denselben Randbedingungen wie Q unterwerfen, dazu aber den Näherungsdifferentialgleichungen

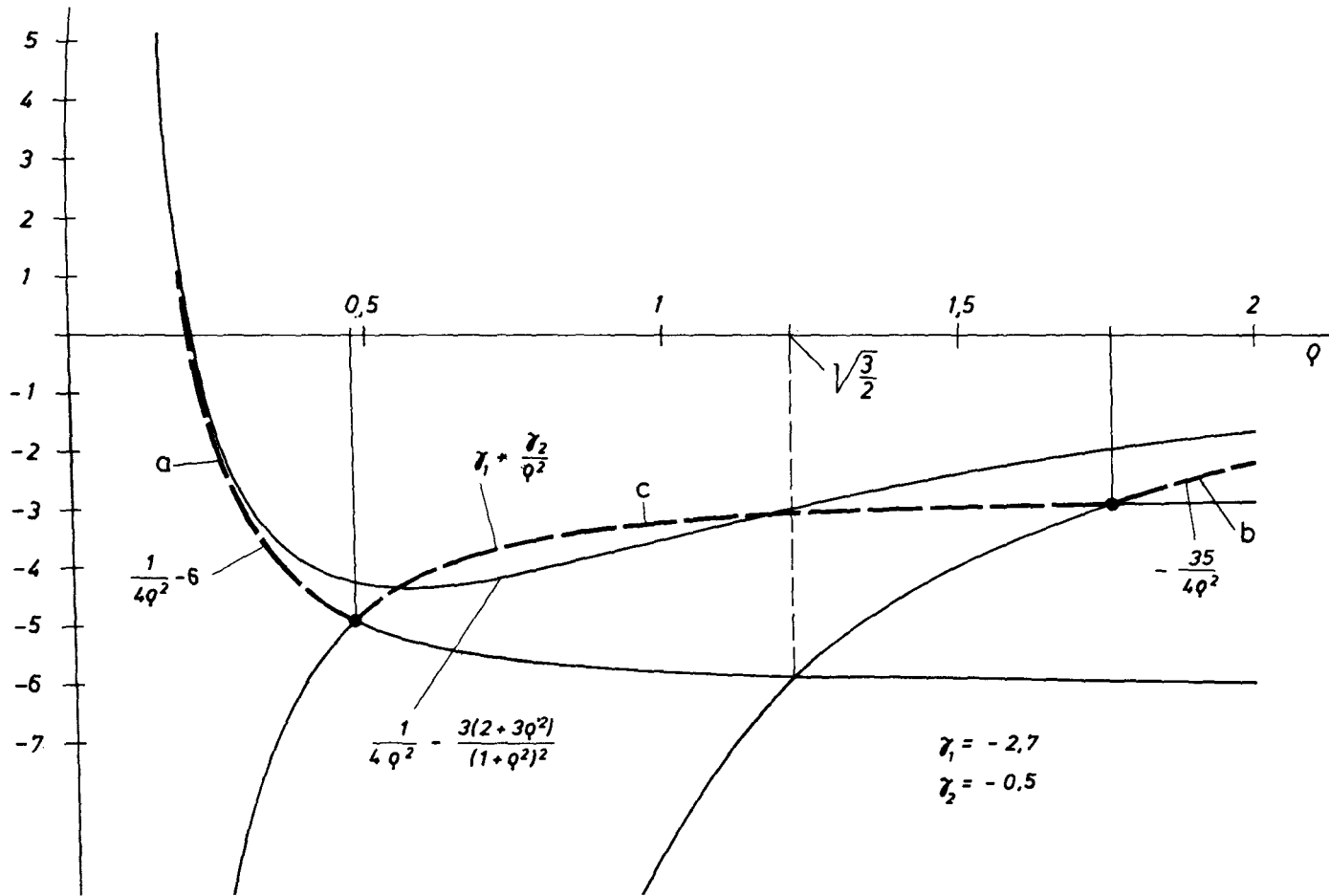


Bild 2

$$\text{in I: } \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{4\rho^2} - 6 \right) \tilde{Q} = 12 \left(\frac{\rho}{1+\rho^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi \quad (3)$$

$$\text{in II: } \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \varphi^2} - \frac{35}{4\rho^2} \tilde{Q} = 12 \left(\frac{\rho}{1+\rho^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi$$

mit den nun neu hinzukommenden Übergangsbedingungen, daß für $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$, grad \tilde{Q} und \tilde{Q} stetig sein sollen, woraus dann auf Grund von (3) die Stetigkeit von $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \varphi^2}$ und $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \rho^2}$ folgt. Entsprechend setzen wir $\tilde{P} = \rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \tilde{Q}$.

3) Für die Integration der homogenisierten Gleichung (3) setzen wir $\tilde{Q}_{\text{hom}} = \Phi_0(\rho) + \Phi_1(\rho) \cos \varphi$ und erhalten

$$\text{in I: } \left[\Phi''_0 - \left(6 - \frac{1}{4\rho^2} \right) \Phi_0 \right] + \left[\Phi''_1 - \left(6 + \frac{3}{4\rho^2} \right) \Phi_1 \right] \cos \varphi = 0,$$

$$\text{in II: } \left[\Phi''_0 - \frac{35}{4\rho^2} \Phi_0 \right] + \left[\Phi''_1 - \frac{39}{4\rho^2} \Phi_1 \right] \cos \varphi = 0,$$

worin wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen 1 und $\cos \varphi$ alle eckigen Klammern verschwinden müssen. Nach Watson [5] ist eine Lösung von

$$u'' - \left[c^2 + \frac{P(P+1)}{z^2} \right] u = 0: \quad u = z^{\frac{1}{2}} Z_{P+\frac{1}{2}}(\text{ciz})$$

— $Z_{P+\frac{1}{2}}$ eine Zylinderfunktion —, so daß unter Berücksichtigung der Regularitätsbedingung $\Phi_0 = A_0 \sqrt{\rho} J_0(i\rho \sqrt{6})$, $\Phi_1 = A_1 \sqrt{\rho} J_1(i\rho \sqrt{6})$ für das Gebiet I folgt.

Im Gebiet II ist es einfacher, da die charakteristischen Gleichungen der Eulerschen Differentialgleichungen $\alpha(\alpha-1) - \frac{35}{4} = 0$ mit den Wurzeln $\alpha_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm 3$

bzw. $\alpha(\alpha-1) - \frac{39}{4} = 0$ mit den Wurzeln $\alpha_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$ lauten,

$$\Phi_0 = C_0 \rho^{7/2} + C_1 \rho^{-5/2} \quad \text{und} \quad \Phi_1 = C_1 \rho^{\frac{1}{2} + \sqrt{10}} + D_1 \rho^{\frac{1}{2} - \sqrt{10}}.$$

Hiernach ist also in II

$$\tilde{P}_{\text{hom}} = \rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(C_0 \rho^{7/2} + D_0 \rho^{-5/2} \right) + \left(C_1 \rho^{\frac{1}{2} + \sqrt{10}} + D_1 \rho^{\frac{1}{2} - \sqrt{10}} \right) \cos \varphi \right].$$

Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \rho^{\frac{7}{2}} &= 1, & \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \rho^{-\frac{5}{2}} &= 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \rho^{\frac{1}{2} + \sqrt{10}} &= \infty, & \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \rho^{\frac{1}{2} - \sqrt{10}} &= 0 \end{aligned}$$

muß, damit \tilde{P}_{hom} die Randbedingungen im Unendlichen erfülle, $C_0 = P_{\infty}$ und $C_1 = 0$ sein, womit P_{hom} in II die Form annimmt:

in II:

$$\tilde{P}_{\text{hom}} = \rho^{-\frac{1}{2}} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \left[P_{\infty} \rho^{\frac{7}{2}} + D_0 \rho^{-\frac{5}{2}} + D_1 \rho^{\frac{1}{2}} \sqrt{10} \cos \varphi \right]$$

hingegen in I:

$$\tilde{P}_{\text{hom}} = (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \left[A_0 I_0(\rho \sqrt{6}) + A_1 I_1(\rho \sqrt{6}) \cos \varphi \right]$$

Hierin sind die Besselschen Funktionen mit rein imaginären Argumenten (siehe Watson [5] Seite 77 ff.) eingeführt worden

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2} \nu \pi i} J_\nu(z e^{\frac{1}{2} \pi i}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

für welche die Funktionalgleichungen bestehen

$$I_0'(z) = I_1(z), \quad z I_\nu'(z) + \nu I_\nu(z) = z I_{\nu-1}(z),$$

woraus $I_1'(z) = I_0(z) - \frac{1}{z} I_1(z)$ folgt.

Offenbar wird die geforderte Stetigkeit von \tilde{P} und seinen Gradienten an der Stelle $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$ für alle φ dann und nur dann gewährleistet, wenn A_0, A_1, D_0, D_1 durch die Gleichungen festgelegt werden

$$\begin{aligned} [A_0 I_0(\rho \sqrt{6})]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} &= [P_{\infty} \rho^3 + D_0 \rho^{-3}]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}; \\ [A_1 I_1(\rho \sqrt{6})]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} &= [D_1 \rho^{-1} \sqrt{10}]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \left[\frac{d}{d\rho} A_0 I_0(\rho \sqrt{6}) \right]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} &= \left[\frac{d}{d\rho} (P_{\infty} \rho^3 + D_0 \rho^{-3}) \right]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}; \\ \left[\frac{d}{d\rho} A_1 I_1(\rho \sqrt{6}) \right]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} &= \left[\frac{d}{d\rho} D_1 \rho^{-1} \sqrt{10} \right]^\rho = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Das ergibt ausgerechnet

$$A_0 I_0(3) = P_{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + D_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}; \quad A_1 I_1(3) = D_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{10}$$

$$A_0 \sqrt{6} I_1(3) = 3 \left[P_{\infty} \frac{3}{2} - D_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \right];$$

$$A_1 \sqrt{6} \left[I_0(3) - \frac{1}{3} I_1(3) \right] = -\sqrt{10} D_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (-1 - \sqrt{10})$$

oder

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 I_0(3) &= P_{\infty} \cdot \frac{3}{2} + D_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & A_1 I_1(3) &= D_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{10} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 I_1(3) &= P_{\infty} \cdot \frac{3}{2} - D_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \end{aligned}$$

$$A_1 [3 I_0(3) - I_1(3)] = -\sqrt{10} \cdot D_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt[10]{10}$$

was wir auch so schreiben können:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 [I_0(3) + I_1(3)] &= 3 P_\infty & A_1 I_1(3) &= D_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 D_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 [I_0(3) - I_1(3)] & A_1 I_0(3) &= \frac{1}{3} (1 - \sqrt{10}) D_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

woraus

$$A_0 = \frac{3 P_\infty \sqrt{6}}{2 [I_0(3) + I_1(3)]}, \quad D_0 = -\frac{27 P_\infty}{8} \frac{I_0(3) - I_1(3)}{I_0(3) + I_1(3)}$$

und

$$A_1 = D_1 = 0$$

folgt, (dieses Ergebnis $A_1 = D_1 = 0$ hätte man voraussetzen können). Damit ist jetzt $P_{\text{hom.}}$ in folgender Form gewonnen:

Es ist

$$\text{in I:} \quad \tilde{P}_{\text{hom.}} = \frac{3 P_\infty \sqrt{6}}{2 [I_0(3) + I_1(3)]} (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} I_0(\rho \sqrt[10]{10}),$$

$$\text{in II:} \quad \tilde{P}_{\text{hom.}} = P_\infty (1 + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\rho^3 + \frac{27}{8} \frac{I_0(3) - I_1(3)}{I_0(3) + I_1(3)} \cdot \rho^{-3} \right]. \quad (5)$$

Hierin ist also

$$I_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}, \quad I_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1+2m}}{m! (m+1)!}.$$

4) Eine an der Stelle $\rho = 0$ reguläre patrikulare Lösung von (3), die im Unendlichen verschwinden muß, da ja schon $\tilde{P}_{\text{hom}}(\infty) = P_\infty$ ist, ermitteln wir nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wir setzen $\tilde{P}_{\text{part.}} = \Psi(\rho) \cos \varphi$, also $\tilde{Q}_{\text{part.}} = [\rho^{1/2} (1 + \rho^2)^{3/2}] \Psi(\rho) \cos \varphi$ und finden für $\Psi(\rho)$ so durch Einsetzen in (3)

$$\begin{aligned} \text{in I:} \quad \Delta_I(\Psi) &= \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^3 \Psi'' + \frac{1}{\rho^2} (1 + \rho^2)^2 (1 + 7\rho^2) \Psi' \\ &\quad - \frac{1 + \rho^2}{\rho} \left[6 (1 + \rho^2)^2 + \frac{1}{\rho^2} (1 - 4\rho^2 - 8\rho^4) \right] \Psi - 12 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{in II:} \quad \Delta_{II}(\Psi) &= \frac{1}{\rho} (1 + \rho^2)^3 \Psi'' + \frac{1}{\rho^2} (1 + \rho^2)^2 (1 + 7\rho^2) \Psi' \\ &\quad - \frac{1}{\rho^3} (1 + \rho^2) (10 + 14\rho^2 + \rho^4) \Psi - 12 = 0. \end{aligned}$$

Damit alle in der Ausgangsgleichung auftretenden Funktionen und deren Ableitungen stetig seien, wozu es wie bei $\tilde{P}_{\text{hom.}}$ genügt, nur die Stetigkeit von $\Psi(\rho)$ und $\Psi'(\rho)$ an der Stelle $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$ zu fordern. Die Stetigkeit von $\Psi''(\rho)$ folgt dann ebenso wie die von $\tilde{P}_{\text{hom.}}(\rho)$ aus den Differentialgleichungen. Für kleine ρ ist

$$\Delta_I(\Psi) \approx \frac{1}{\rho} \Psi'' + \frac{1}{\rho^2} \Psi' - \frac{1}{\rho^3} \Psi - 12, \quad \text{so daß} \quad \Psi \approx \frac{3}{2} \rho^3,$$

für große ρ

$$\frac{1}{\rho^5} \Delta_{II} \Psi \approx \Psi'' + \frac{7}{\rho} \Psi' - \frac{1}{\rho^2} \Psi - \frac{12}{\rho^5}, \quad \text{so daß} \quad \Psi \approx -\frac{6}{5} \rho^{-3}.$$

Daher machen wir etwa den Ansatz

$$\text{in I} \quad \Psi' = \Psi'_I = \rho^3 \left(\frac{3}{2} + a_I \rho^2 + b_I \rho^4 + c_I \rho^6 \right),$$

$$\text{in II} \quad \Psi' = \Psi'_{II} = \rho^{-3} \left(-\frac{6}{5} + a_{II} \rho^{-2} + b_{II} \rho^{-4} + c_{II} \rho^{-6} \right)$$

und bilden mit diesen die durch einfaches Integrieren von Potenzen zu berechnenden Integrale

$$\text{Int. I} = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} [\Delta_I(\Psi'_I)]^2 d\rho = \Omega_I(a_I, b_I, c_I),$$

$$\text{Int. II} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\infty} [\Delta_{II}(\Psi'_{II})]^2 d\rho = \Omega_{II}(a_{II}, b_{II}, c_{II}).$$

Hierauf machen wir $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ zum Minimum unter Berücksichtigung der (Stetigkeits-)Bedingungsgleichungen

$$h_1(a_I, b_I, c_I, a_{II}, b_{II}, c_{II}) = \Psi'_I \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \Psi'_{II} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 0, \quad (7)$$

$$h_2(a_I, b_I, c_I, a_{II}, b_{II}, c_{II}) = \Psi''_I \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \Psi''_{II} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 0,$$

die in den a, b, c linear sind. Die Multiplikatorenmethode liefert dann die Gleichungen

$$\text{I:} \quad \frac{\partial \Omega_I}{\partial a_I} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial a_I} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial a_I} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_I}{\partial b_I} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial b_I} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial b_I} = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega_I}{\partial c_I} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial c_I} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial c_I} = 0$$

$$\text{II:} \quad \frac{\partial \Omega_{II}}{\partial a_{II}} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial a_{II}} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial a_{II}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{II}}{\partial b_{II}} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial b_{II}} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial b_{II}} = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega_{II}}{\partial c_{II}} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial c_{II}} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial c_{II}} = 0.$$

Die Ableitungen der $h_{1,2}$ sind hierin Konstante, also von den a, b, c unabhängig. Wir lösen (I) und (II) nach den Unbekannten auf (die Gleichungen sind wieder linear) und finden

$$\begin{aligned} a_I &= \alpha_{I1} \lambda_1 + \alpha_{I2} \lambda_2, \quad b_I = \beta_{I1} \lambda_1 + \beta_{I2} \lambda_2, \quad c_I = \gamma_{I1} \lambda_1 + \gamma_{I2} \lambda_2, \\ a_{II} &= \alpha_{II1} \lambda_1 + \alpha_{II2} \lambda_2, \quad b_{II} = \beta_{II1} \lambda_1 + \beta_{II2} \lambda_2, \quad c_{II} = \gamma_{II1} \lambda_1 + \gamma_{II2} \lambda_2. \end{aligned}$$

Diese Werte in (7) eingesetzt ergeben für λ_1, λ_2 zwei lineare Gleichungen, die zu lösen sind. Mit Hilfe der Lösungen berechnen wir die a, b, c womit $\Psi(\rho)$ bekannt ist.

Dann ist also

$$\tilde{P}(\rho, \varphi) = \tilde{P}_{\text{hom.}}(\rho) + \Psi(\rho) \cos \varphi.$$

Man kann durch Vermehrung der Konstanten möglicherweise ein besseres $\Psi(\rho)$ erzielen. Von $\tilde{P}(\rho, \varphi)$ sind stetig alle Ableitungen der Form $\frac{\partial^{m+n}}{\partial \rho^m \partial \varphi^n} P(\rho, \varphi)$, in der $m = 0, 1, 2$ und $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ist.

IV. Schlußbemerkung

Wünscht man eine bessere Annäherung an die Lösung der Gl. (2) so kann z. B. die Funktion

$$f(\rho) = \frac{1}{4\rho^2} - \frac{3(2 + 3\rho^2)}{(1 + \rho^2)^2}$$

in dem zu untersuchenden Bereich nicht wie bisher durch zwei sondern durch drei Näherungsbögen ersetzt werden. Zweckmäßig ist es hierbei, diesen dritten Bogen in der Form $\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\rho^2}\right)$ zu nehmen, wobei γ_1 und γ_2 frei wählbare Konstanten sind. Ein solcher Bogen c ist in Bild 2 angegeben. Man kann natürlich γ_2 so wählen, daß man z. B. schließlich als Lösung der Gl. (2) eine tabellierte Besselsche Funktion erhält [6].

Literatur

- [1] Nahme, R.: Beiträge zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. Ing.-Arch., Bd. 11 (1940), S. 191.
- [2] Vogelpohl, G.: Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forsch.-Heft 386 (1937).
- [3] Dörr, J.: Schmiermitteldruck mit Randverformungen des Rollenlagers. Ingenieur-Archiv, Bd. 22 (1954), S. 171.
- [4] Dowson-Higginson: Elasto-hydrodynamic lubrication. Pergamon Press 1966.
- [5] Watson, G. N.: Bessel functions. University press Cambridge 1922.
- [6] Abramowitz, M.: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications 1965.